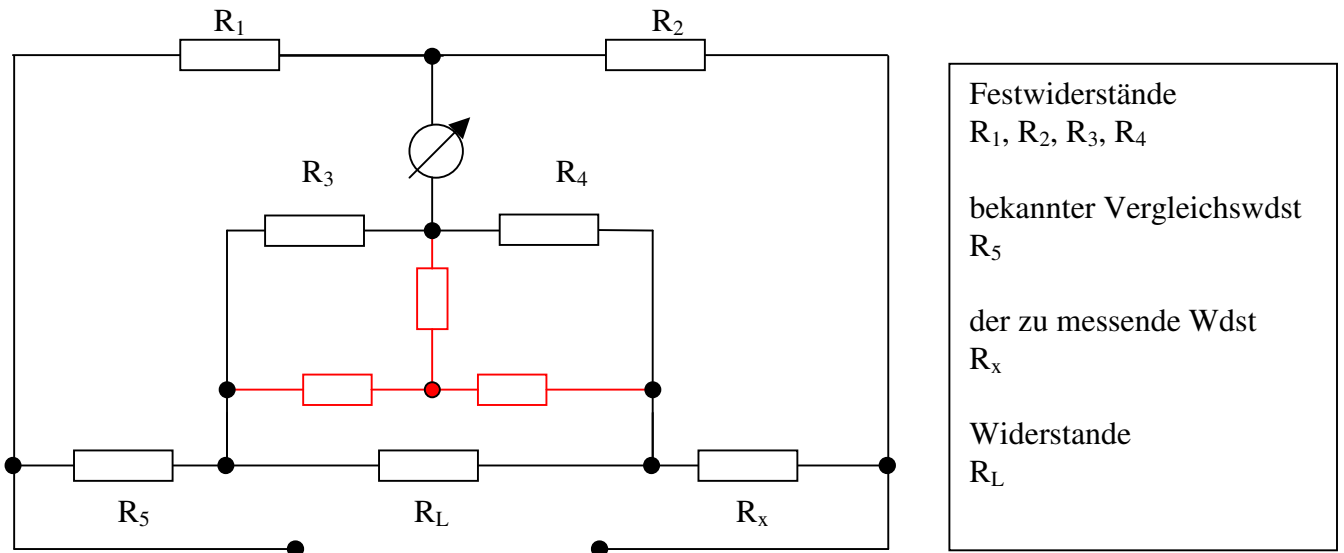


Messgeräte

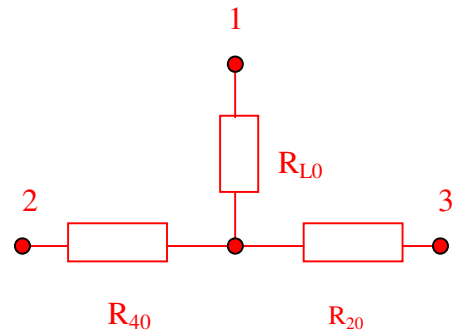
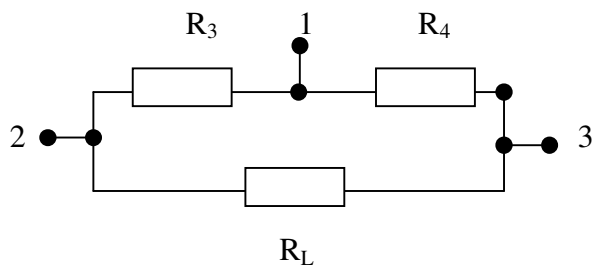
- 1. Die Thomson – Brücke**
- 2. Das Drehspulinstrument**
- 3. Das Weicheiseninstrument**
- 4. Das Wattmeter**

1. Die Thomson - Brücke

Man verwendet sie zur Messung sehr kleiner Widerstände, die bereits in der Größenordnung der Zuleitungen liegen.



Die Widerstände sind so gewählt, daß $R_1 / R_2 = R_3 / R_4$ gilt. Ersetzt man das Widerstands-dreieck $R_3 - R_4 - R_L$ durch einen gleichwertigen Widerstands-stern $R_{30} - R_{40} - R_{L0}$, so erhält man eine Wheatsonsche Brücke.



$$\frac{1}{R_{L0} + R_{40}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_L + R_4} ; \text{ (Leitwert Pkt. 1 - 2)}$$

$$\frac{1}{R_{L0} + R_{30}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_L + R_3} ; \text{ (Leitwert Pkt. 1 - 3)}$$

$$\frac{1}{R_{40} + R_{30}} = \frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_3 + R_4} ; \text{ (Leitwert Pkt. 2 - 3)}$$

$$\frac{1}{R_{L0} + R_{40}} = \frac{R_L + R_4 + R_3}{R_3 (R_L + R_4)} ; R_{L0} + R_{40} = \frac{R_3 \cdot R_L + R_3 \cdot R_4}{R_L + R_4 + R_3}$$

$$\frac{1}{R_{L0} + R_{30}} = \frac{R_L + R_4 + R_3}{R_4 (R_L + R_3)} ; R_{L0} + R_{30} = \frac{R_4 \cdot R_L + R_3 \cdot R_4}{R_L + R_4 + R_3}$$

$$R_{L0} + R_{40} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_L + R_4 + R_3} + \frac{R_3 \cdot R_L}{R_L + R_4 + R_3}$$

$$R_{L0} + R_{30} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_L + R_4 + R_3} + \frac{R_4 \cdot R_L}{R_L + R_4 + R_3}$$

$$R_{L0} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4 + R_L}$$

$$R_{40} = \frac{R_3 \cdot R_L}{R_3 + R_4 + R_L} ; R_{30} = \frac{R_L \cdot R_4}{R_3 + R_4 + R_L} \Rightarrow \frac{R_{40}}{R_{30}} = \frac{R_3}{R_4}$$

Der Nullzweig ist stromlos für Wheatstonsche Brücke, wenn gilt:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_5 + R_{40}}{R_x + R_{30}} ; \text{ da } \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \text{ ist}$$

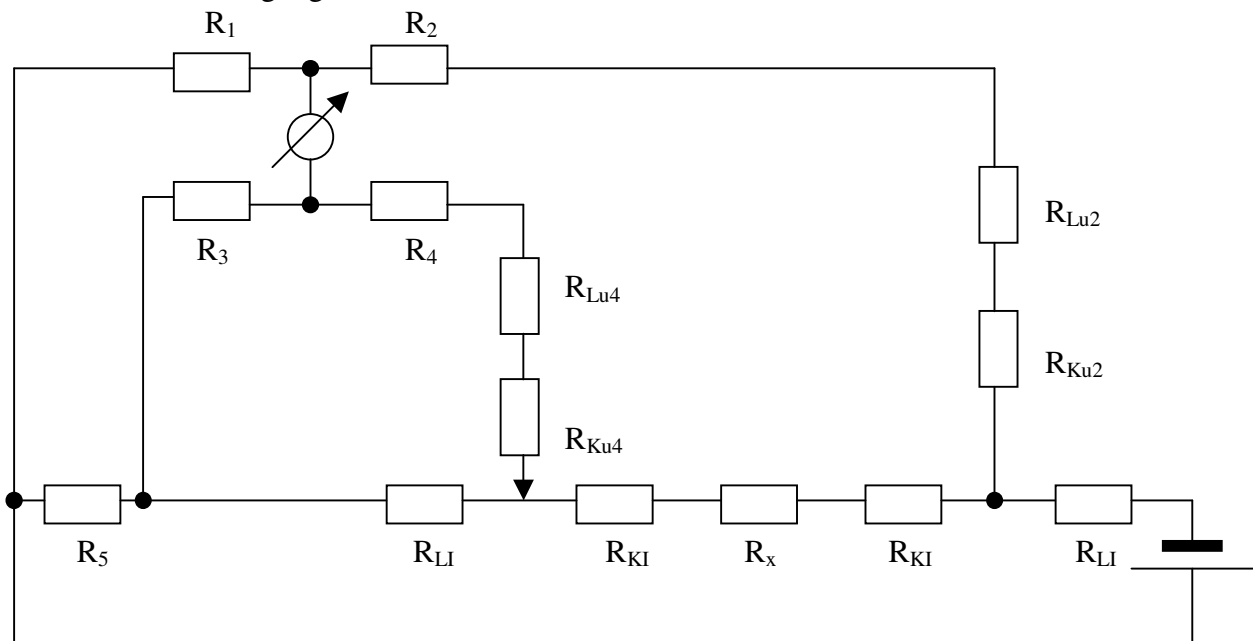
$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{R_5 + R_{40}}{R_x + R_{30}} ; \text{ und da } \frac{R_{40}}{R_{30}} = \frac{R_3}{R_4} \text{ ist}$$

$$\frac{R_{40}}{R_{30}} = \frac{R_5 + R_{40}}{R_x + R_{30}} ; \text{ und daraus } \frac{R_5}{R_x} = \frac{R_{40}}{R_{30}} = \frac{R_3}{R_4}$$

Die Bedingung für Stromlosigkeit des Nullzweiges lautet daher

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_5}{R_x}$$

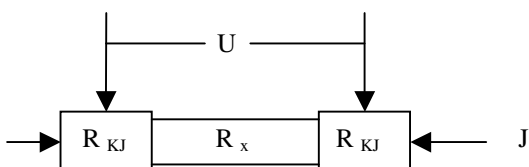
für R_L keine Bedingung.



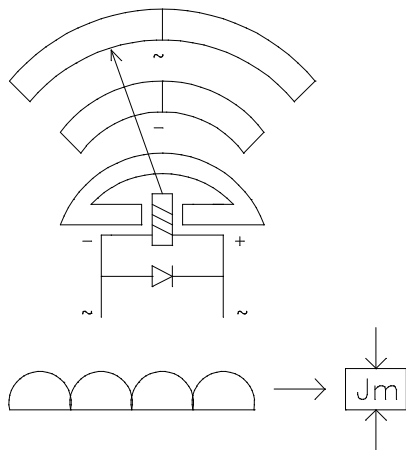
R_L - Leitungswiderstand

R_K - Kontaktwiderstand

R_{LJ} geht in die Messung überhaupt nicht ein. ($R_{Lu4} + R_{Ku4}$) sollte gleich sein ($R_{Lu2} + R_{Ku2}$) oder \ll als $R_2 = R_4$; R_{KJ} muß \ll als R_x , d. h. kleinen Kontaktwiderstand zu R_x ist Bedingung.



2. Das Drehspulinstrument



Skala gleichmäßig

Bei Spannungsmessung großes R_i (d.h. kleiner Stromverbrauch durchs Instrument).

Physik:

Das Instrument setzt die sich zeitlich ändernden Stromwerte in ihren arithmetischen Mittelwert um.

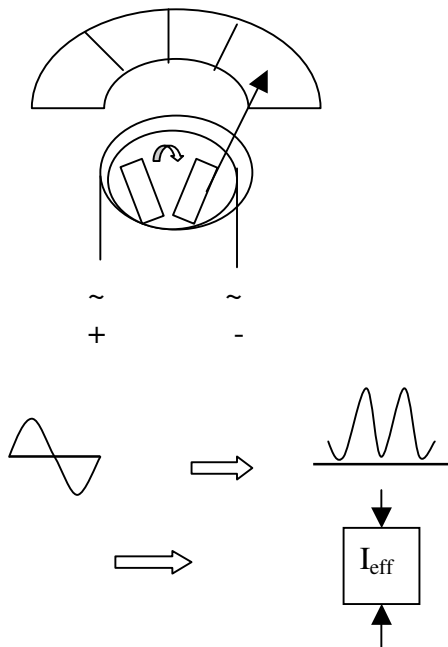
Für Gleichstrommessung: besonders geeignet.

Die Gleichstromskala zeigt den arithmetischen Mittelwert an.

Für Wechselstrommessung nicht günstig.

Die Wechselstromskala ist auf den Effektivwert geeicht ($J_{\text{eff}} = 1,11 J$). Die Anzeige ist nur richtig, wenn der Wechselstrom sinusförmig ist.

3. Das Weicheiseninstrument (Dreheisen)



Skala ungleichmäßig

Bei Spannungsmessung kleines R_i (d. h. großer Stromverbrauch durchs Instrument)

Physik:

Das Instrument setzt die sich zeitlich ändernden Stromwerte in ihren quadratischen Mittelwert (Effektivwert) um.

Für Wechselstrommessung: besonders geeignet

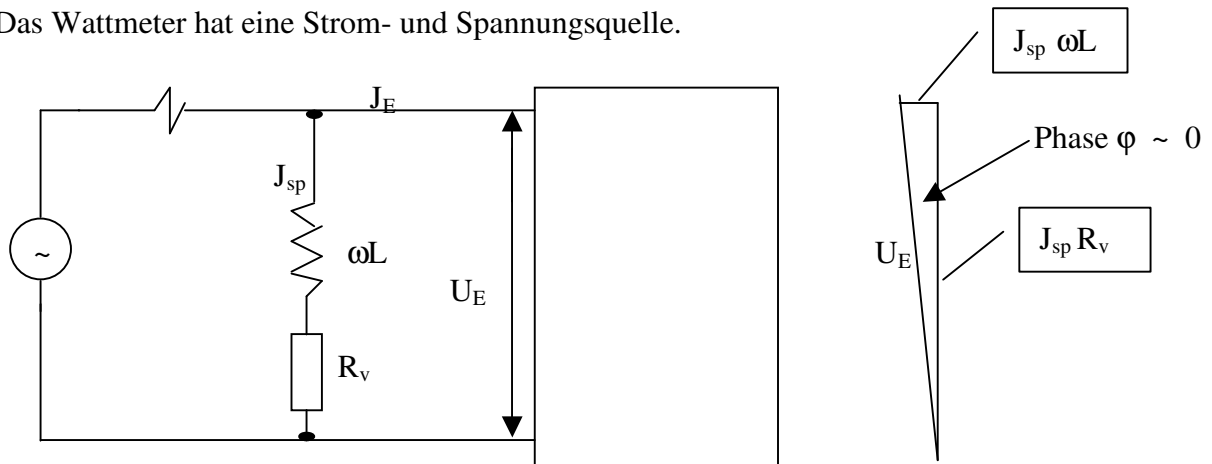
Die Skala zeigt den Effektivwert an. Auch nichtsinusförmiger Strom wird richtig angezeigt.

Für Gleichstrommessung: nicht günstig.

Die Anzeige ist nur bei reinem Gleichstrom richtig, dann ist $J_m = J_{\text{eff}}$, weil andernfalls Oberwellen mitgemessen werden.

4. Das Wattmeter

Das Wattmeter hat eine Strom- und Spannungsquelle.



$$\frac{\omega L}{R_v} = 0,1 \text{ gibt einen Fehler von } 1\%$$

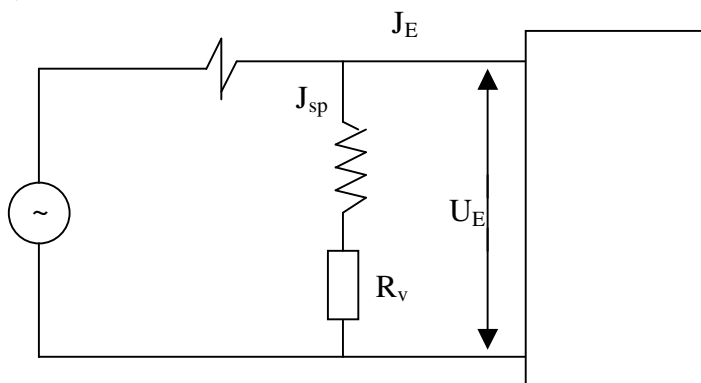
Damit das Instrument die richtigen Spannungsmomentanwerte multipliziert, muß der Strom durch die Spannungsspule in Phase mit der zu messenden Eingangsspannung U_E sein. Dies erreicht man damit, daß man den Vorwiderstand R_v groß gegenüber dem ωL der Spannungsspule macht, so daß der Strom durch den Vorwiderstand R_v eingepreßt wird. Das Verhältnis $\omega L / R_v$ ist gewöhnlich für 50 Hz ausgelegt. Mit dem Siemens Wattmeter, kann man bis etwa 350 Hz messen.

Meßfehler die aus dem Verhältnis $\omega L / R_v$ entstehen, kann man durch Wahl einen größtmöglichen Faktors (z.B: 5) beim Vorwiderstand vermeiden.

Meßfehler:

Meßfehler die aus der Art der Schaltung entstehen, werden durch Rückrechnen korrigiert.

1)

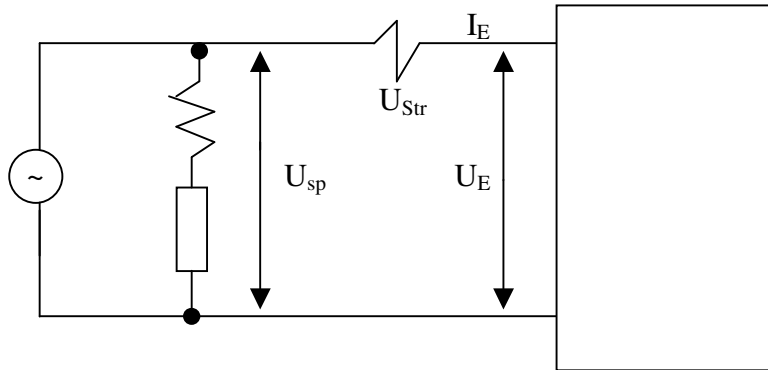


Die Stromquelle erzeugt statt dem Feld des Stromes J_E , das Feld des Stromes $J_E + J_{sp}$. Fehler ist größer als 1 % wenn $J_{sp} > 0,01 J_E$

$$\text{z.B: } U_E = 220 \text{ V}; R_v = 8000 \Omega; I_{sp} = \frac{220}{8000} = 0,028 \text{ A}$$

$$I_E + I_{sp} = 0,7 + 0,028 = 0,728 \text{ A}; \text{ Fehler} = \frac{0,028}{0,7} = 0,04 = 4\%$$

2)



Die Spannungsspule erzeugt statt dem Feld, hervorgerufen durch die Spannung U_E , das Feld, hervorgerufen durch die Spannung U_{sp} . Fehler ist größer als 1 %, wenn $U_{sp} > 1,01 U_E$ ist.

$$\text{z.B: } R_{\text{Stromspule}} = 0,16 \Omega; \omega L_{\text{Stromspule}} = 314 \cdot 0,13 \text{ mH} = 0,04 \Omega;$$

$$R_{\text{Stromspule}} = \sqrt{0,16^2 + 0,04^2} = \sqrt{256 \cdot 10^{-4} + 16 \cdot 10^{-4}} = 0,165 \Omega;$$

$$I_E = 0,7 \text{ A}; U_{Str} = 0,7 \cdot 0,165 = 0,115 \text{ V}; U_{sp} = 220 \text{ V};$$

$$U_E = U_{sp} + U_{Str} = 220 - 0,115 \sim 220 \text{ V}; \text{ Fehler} \sim 0;$$

Blindleistungsmessung

Der Meßwiderstand R_v für die Wirkleistungsmessung muß ersetzt werden durch einen Kondensator C_v für die Blindleistungsmessung. Je größer der Meßwiderstand R_v , desto kleiner der Strom J_{sp} durch die Spannungsspule, desto größer der Faktor mit dem die Meßinstrumentenanzeige multipliziert werden muß.

Berechnung von C_v

z.B: Faktor ist 3; Meßwiderstand $R_v = 7800 \text{ Ohm}$; (nachmessen)

$$R_v = \frac{1}{\omega C_v}; C_v = \frac{1}{\omega R_v} = \frac{1}{314 \cdot 7800} = \frac{4}{10^7} = 0,4 \mu\text{F}$$

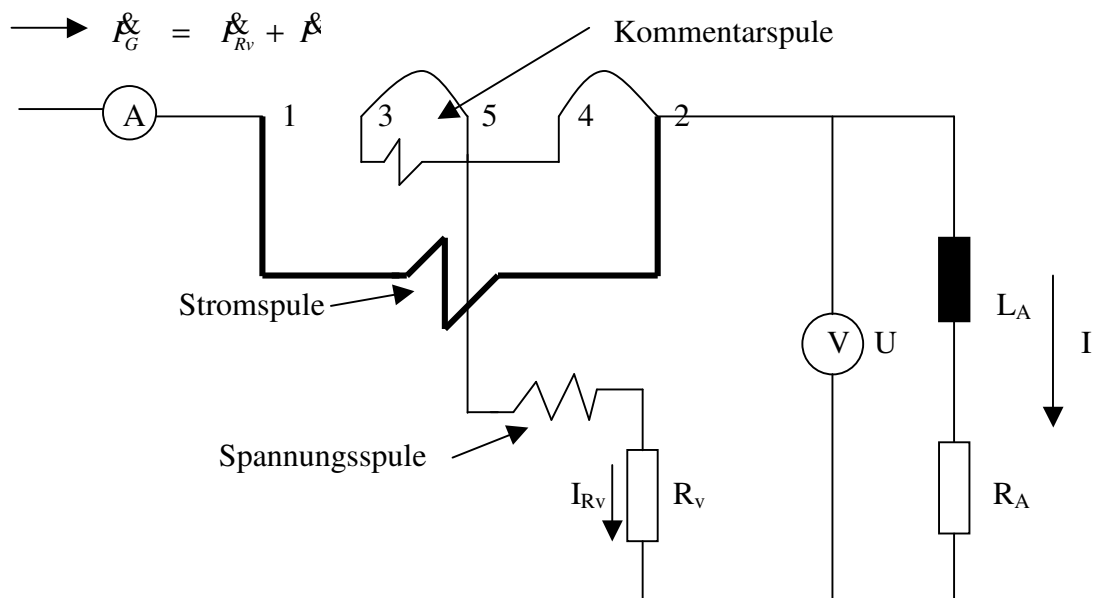
Für Blindleistungsmessung bei 50 Hz

Durch den Kondensator C_v wird die Spannung phasenverschoben, sodaß sie in Phase mit dem Blindstrom ist.

Bei der Blindleistungsmessung mißt das Wattmeter nur die Blindleistung der Grundwelle. Die Blindleistung der Oberwellen erfaßt das Wattmeter nicht.

Das Wattmeter

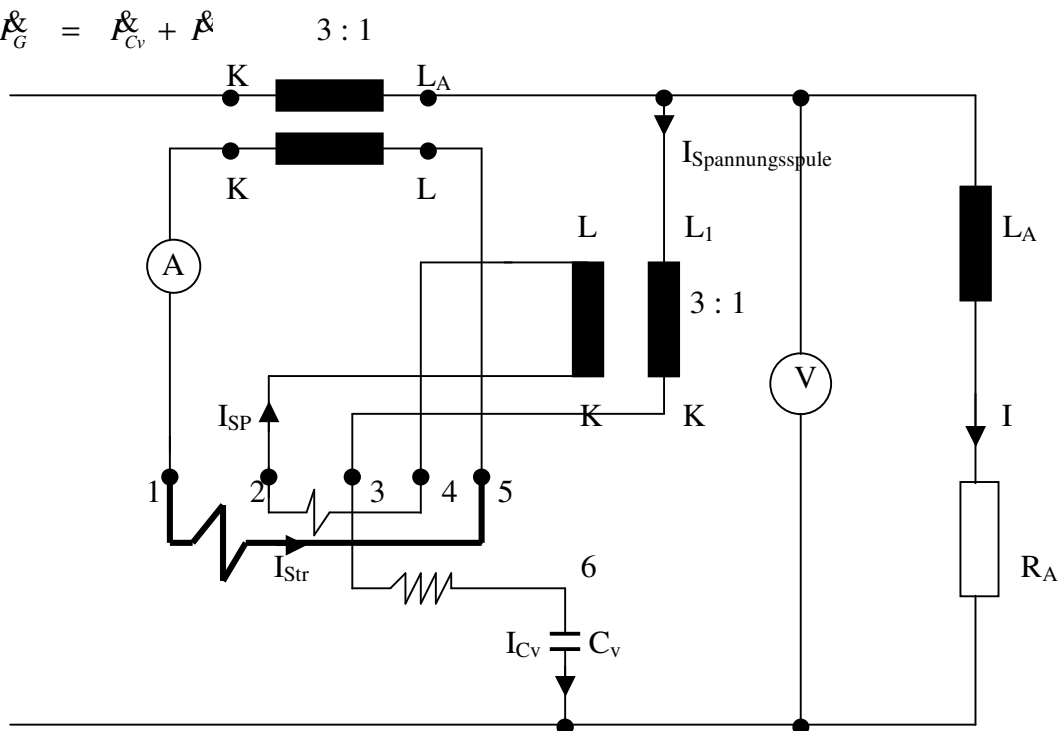
Wirkleistungsmessung mit Selbstkorrektion



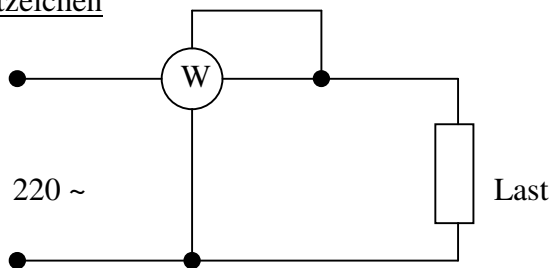
Kommentarspule ist gegengeschaltet, damit I_{R_v} wieder abgezogen wird.

Blindleistungsmessung mit Selbstkorrektion und Stromwandler

$$\dot{P}_G = \dot{P}_{Cv} + \dot{P}$$



Schaltzeichen



Mathematische Ableitung des Wattmeters

Die feststehende Stromspule wird vom zu messenden Strom durchflossen. In dem hierdurch entstehenden magnetischen Feld befindet sich die drehbargelagerte Spannungsspule, an die die zu messende Spannung gelegt wird. Der Strom durch die Spannungsspule ruft seinerseits ein magnetisches Feld hervor. Die Felder stoßen sich ab. Hierdurch mißt das Wattmeter das Produkt der Momentanwerte von Spannung und Strom und zwar als Effektivwert.

1. Spannung und Strom in Phase

$$u = \hat{u} \sin \omega t ; i = \hat{i} \sin \omega t ;$$

$$P = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} u i d\omega t ; P = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} \hat{u} \sin \omega t \cdot \hat{i} \sin \omega t d\omega t ;$$

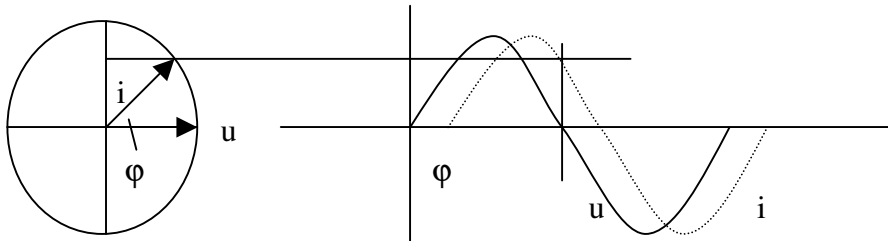
$$P = \frac{1}{\Pi} \hat{u} \hat{i} \int_0^{\Pi} \sin^2 \omega t d\omega t ; P = \frac{1}{\Pi} \hat{u} \hat{i} \left[-\frac{1}{4} \sin 2\omega t + \frac{1}{2} \omega t \right]_0^{\Pi} ;$$

$$P = \frac{1}{\Pi} \hat{u} \hat{i} \left[\left(0 + \frac{\Pi}{2}\right) - (0 + 0) \right] ; P = \frac{1}{\Pi} \hat{u} \hat{i} \frac{\Pi}{2} ; P = \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} ;$$

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot U \cdot \sqrt{2} \cdot I ; P = U \cdot I$$

Das Wattmeter mißt die Leistung.

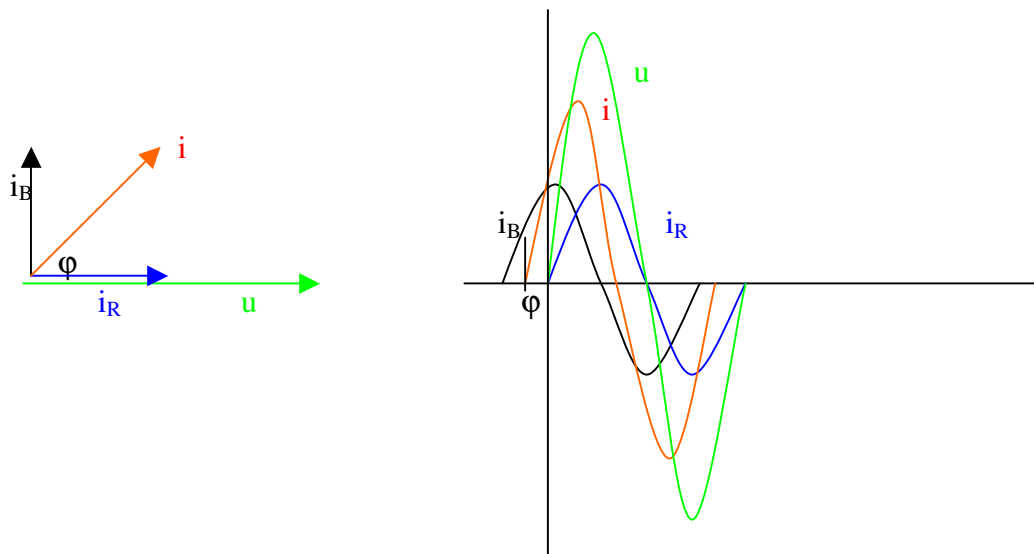
2. Spannung und Strom phasenverschoben



$$u = \hat{u} \sin \omega t$$

$$i = \hat{i} \sin (\omega t + \varphi)$$

Der phasenverschobene Strom läßt sich in einen Wirk- und Blindanteil zerlegen.

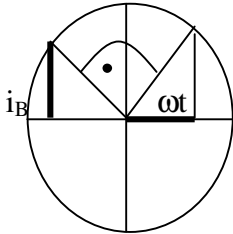


$$\hat{i} = \hat{i}_R + \hat{i}_B$$

$$i = i_R + i_B$$

Die geometrische Summe der Wirk- und Blindspitzenwerte gibt den Spitzenwert des Gesamtstromes. Die arithmetische Summe der Wirk- und Blindmomentanwerte gibt den Momentanwert des Gesamtstromes.

$$i_R = \hat{i}_R \cdot \sin \omega t \quad ; \quad i_B = \hat{i}_B \cdot \sin (\omega t + 90^\circ) \quad ; \quad i_{\wedge B} = \hat{i}_B \cdot \cos \omega t$$



$$u = \hat{u} \sin \omega t \quad ; \quad i_R = \hat{i}_R \cdot \sin \omega t \quad ; \quad i_B = \hat{i}_B \cdot \cos \omega t \quad ; \quad i = i_R + i_B \quad ;$$

$$P = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} u i d\omega t \quad ; \quad P = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} u (i_R + i_B) d\omega t \quad ; \quad P = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} (u \cdot i_R + u \cdot i_B) d\omega t \quad ;$$

$$P = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} u i_R d\omega t \quad + \quad \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} u i_B d\omega t \quad ;$$

$$P = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} \hat{u} \cdot \sin \omega t \cdot \hat{i}_R \sin \omega t \cdot d\omega t \quad + \quad \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} \hat{u} \cdot \sin \omega t \cdot \hat{i}_B \cos \omega t \cdot d\omega t \quad ;$$

$$P = U \cdot I_R \quad + \quad \frac{1}{\Pi} \hat{u} \cdot \hat{i}_B \int_0^{\Pi} \sin \omega t \cdot \cos \omega t \cdot d\omega t \quad ;$$

$$\sin 2u = 2 \sin u \cdot \cos u \quad ; \quad \frac{1}{2} \sin 2u = \sin u \cdot \cos u \quad ;$$

$$P = U \cdot I_R \quad + \quad \frac{1}{\Pi} \hat{u} \cdot \hat{i}_B \int_0^{\Pi} \frac{1}{2} \sin 2\omega t \cdot d\omega t \quad ;$$

$$P = U \cdot I_R \quad + \quad \frac{1}{2\Pi} \hat{u} \cdot \hat{i}_B \int_0^{\Pi} \sin 2\omega t \cdot d\omega t \quad ;$$

$$P = U \cdot I_R \quad + \quad \frac{1}{2\Pi} \hat{u} \cdot \hat{i}_B \left[-\frac{\cos 2\omega t}{2} \right]_0^{\Pi} \quad ;$$

$$P = U \cdot I_R \quad + \quad \frac{1}{\Pi} \hat{u} \cdot \hat{i}_B \left[\left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] \quad ; \quad P = U \cdot I_R$$

Der Blindstrom gibt keinen Anteil an der angezeigten Leistung des Wattmeters.

3. Spannung und Strom in Phase, Strom hat Oberwellen

$$u = \hat{u} \sin \omega t ; i = i_R + i_n ; i_R = \hat{i}_R \sin \omega t ; \hat{i}_n = \hat{i}_n \cdot \sin n\omega t ;$$

$$P = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} u i d\omega t ; P = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} u (i_R + i_n) d\omega t ;$$

$$P = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} (u \cdot i_R + u \cdot i_n) d\omega t ; P = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} u \cdot i_R d\omega t + \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} u \cdot i_n d\omega t ;$$

$$P = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} \hat{u} \sin \omega t \cdot \hat{i}_R \sin \omega t d\omega t + \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} \hat{u} \sin \omega t \cdot \hat{i}_n \cdot \sin n\omega t d\omega t ;$$

$$P = U \cdot I_R + \frac{1}{\Pi} \hat{u} \hat{i}_n \int_0^{\Pi} \sin \omega t \cdot \sin n\omega t d\omega t ; n \neq 1$$

$$\int \sin x \cdot \sin nx \cdot dx = \frac{\sin(1-n)x}{2(1-n)} - \frac{\sin(1+n)x}{2(1+n)} ; n \neq 1$$

$$P = U \cdot I_R + \frac{1}{\Pi} \hat{u} \hat{i}_n \left[\frac{\sin(1-n)\omega t}{2(1-n)} - \frac{\sin(1+n)\omega t}{2(1+n)} \right]_0^{\Pi} ; n \neq 1$$

$$P = U \cdot I_R + \frac{1}{\Pi} \hat{u} \hat{i}_n [(0-0) - (0-0)] ; P = U \cdot I_R$$

Oberwellen in Phase geben keinen Anteil an der angezeigten Leistung des Wattmeters.

4. Spannung und Strom phasenverschoben, Strom hat phasenverschobene Oberwellen

$$u = \hat{u} \cdot \sin \omega t ; i = i_R + i_B + i_{nR} + i_{nB} ;$$

$$i_R = \hat{i}_R \cdot \sin \omega t ; i_B = \hat{i}_B \cdot \cos \omega t ; i_{nR} = \hat{i}_{nR} \cdot \sin n\omega t ; i_{nB} = \hat{i}_{nB} \cdot \cos n\omega t ;$$

$$P = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} u \cdot i d\omega t ; P = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} (u \cdot i_R + u \cdot i_B + u \cdot i_{nR} + u \cdot i_{nB}) d\omega t ;$$

$$P = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} u \cdot i_R d\omega t + \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} u \cdot i_B d\omega t + \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} u \cdot i_{nR} d\omega t + \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} u \cdot i_{nB} d\omega t ;$$

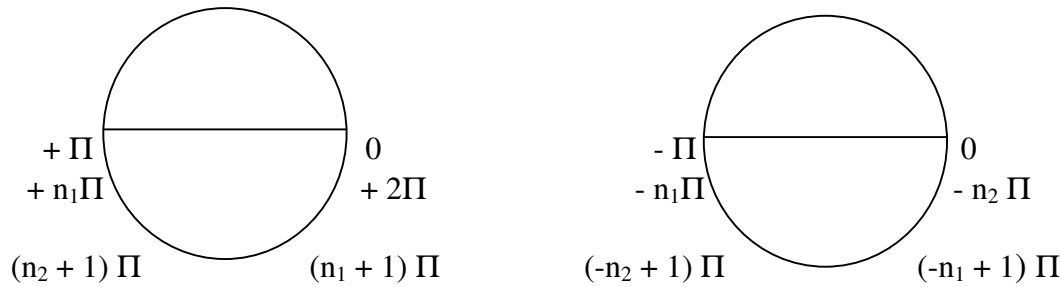
$$P = U \cdot I_R + 0 + 0 + \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} \hat{u} \cdot \sin \omega t \cdot \hat{i}_{nB} \cos n\omega t \cdot d\omega t ;$$

$$P = U \cdot I_R + \frac{1}{\Pi} \hat{u} \cdot \hat{i}_{nB} \int_0^{\Pi} \sin \omega t \cos n\omega t \cdot d\omega t ;$$

$$\int \sin x \cdot \cos nx \cdot dx = -\frac{\cos(1-n)x}{2(1-n)} - \frac{\cos(1+n)x}{2(1+n)} ; n \neq 1$$

$$P = U \cdot I_R + \frac{1}{\Pi} \hat{u} \cdot \hat{i}_{nB} \left[-\frac{\cos(1-n)\omega t}{2(1-n)} - \frac{\cos(1+n)\omega t}{2(1+n)} \right]_0^{\Pi} ; n \neq 1$$

$n_1 =$ ungerade Zahl; $n_2 =$ gerade Zahl



Für $n_1 =$ ungerade Zahl gilt:

$$\left[\left(-\frac{\cos(-2\Pi)}{2(1-n_1)} - \frac{\cos(+2\Pi)}{2(1+n_1)} \right) - \left(-\frac{\cos 0}{2(1-n_1)} - \frac{\cos 0}{2(1+n_1)} \right) \right] =$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2(1-n_1)} - \frac{1}{2(1+n_1)} \right) - \left(-\frac{1}{2(1-n_1)} - \frac{1}{2(1+n_1)} \right) \right] = 0$$

Für $n_2 =$ gerade Zahl gilt:

$$\left[\left(-\frac{\cos(-\Pi)}{2(1-n_2)} - \frac{\cos(+\Pi)}{2(1+n_2)} \right) - \left(-\frac{\cos 0}{2(1-n_2)} - \frac{\cos 0}{2(1+n_2)} \right) \right] =$$

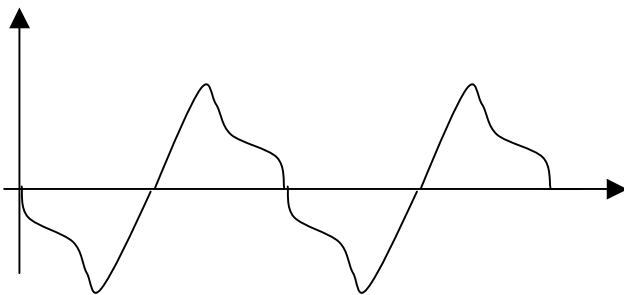
$$= \left[\left(-\frac{-1}{2(1-n_2)} - \frac{-1}{2(1+n_2)} \right) - \left(-\frac{1}{2(1-n_2)} - \frac{1}{2(1+n_2)} \right) \right] =$$

$$= \left[\frac{1}{2(1-n_2)} + \frac{1}{2(1+n_2)} + \frac{1}{2(1-n_2)} + \frac{1}{2(1+n_2)} \right] = \frac{1}{(1-n_2)} + \frac{1}{(1+n_2)} ;$$

$$P = U \cdot I_R + \frac{1}{\Pi} \hat{u} \hat{i}_{n_1 B} \left[-\frac{\cos(1-n_1)\omega t}{2(1-n_1)} - \frac{\cos(1+n_1)\omega t}{2(1+n_1)} \right]_0^{\Pi} +$$

$$+ \frac{1}{\Pi} \hat{u} \hat{i}_{n_2 B} \left[-\frac{\cos(1-n_2)\omega t}{2(1-n_2)} - \frac{\cos(1+n_2)\omega t}{2(1+n_2)} \right]_0^{\Pi} ;$$

$$P = U \cdot I_R + 0 + \left(\frac{1}{(1-n_2)} + \frac{1}{(1+n_2)} \right)$$



Sind die Halbwellen spiegelbildlich zur Abszissenachse (Regelfall in der Starkstromtechnik), so fällt das Gleichstromglied weg und es sind nur ungeradzahlige Harmonische vorhanden,

d. h. : $P = U I_R$

Oberwellen phasenverschoben geben keinen Anteil an der angezeigten Leistung des Wattmeters.

Gesamtergebnis: $P = U I_R$

Blindstrom, Wirkoberwellenstrom und Blindoberwellenstrom geben keinen Anteil an der angezeigten Leistung des Wattmeters, wenn die Spannung keine Sinusform hat.